プログラミング演習
組合せ問題

阿萬裕久
aman@cs.ehime-u.ac.jp

例題1

- 次の等式を満たす (x, y) をすべて列挙しなさい：

  $3x - 2y + 5 = 0$

  ただし，x, y はいずれも整数であり，

  $x, y \in [3, 8]$ とする．

  3 以上 8 以下

例題1：解説

- この場合，x, y いずれの値も

  3 ～ 8 の **6 通り**

  しかあり得ない

- つまり，組合せは 6×6 = 36 通りだけ

  → 何の工夫も要らない
  単に繰り返してチェックするだけ

例題1：解説

Web ページのコーディング例を参照

- 単純に x, y のループを作ってチェック

```
for ( x = 3; x <= 8; x++ ){
  for ( y = 3; y <= 8; y++ ){
    if ( 3*x - 2*y + 5 == 0 ){
      printf("%d %d¥n", x, y);
    }
  }
}
```

例題2

- 次の等式を満たす (x, y, z) をすべて列挙しなさい：

  $3x + 2y + 4z - 123 = 0$

  ただし，x, y, z はいずれも整数であり，x, y, z ∈ [10, 2000] とする．

例題2：解説

- これも例題1と同様にやってみる？

```
for ( x = 10; x <= 2000; x++ ){
  for ( y = 10; y <= 2000; y++ ){
    for ( z = 10; z <= 2000; z++ ){
      if ( 3*x + 2*y + 4*z – 123 == 0 ){
        printf("%d %d %d¥n", x, y, z);
      }
    }
  }
}
```

実行にはかなり
時間がかかる！

例題2：解説

- 今度の場合は x, y, z それぞれの範囲は 10 ～ 2000 の 1991 通りなので，まともにやると

  1,991 × 1,991 × 1,991

  = 7,892,485,271 回

これだけの回数をまともにチェックするのはコンピュータといえども時間がかかる

例題2：解説

- 問題の特性を検討してみる

  $\boxed{3x + 2y + 4z - 123 = 0}$

いま，y, z を最小値(10)に固定して考えると
3x + 20 + 40 -123 = 0 より x = 21 を得る．
y, z ≧ 10 なので，x ≦ 21 がいえる．
したがって，**x > 21 は解としてあり得ない**．

例題2：解説

- 同様にして，
  - y ≦ 26
  - z ≦ 18

  で十分であることが導かれる

例題2：解説

- したがって，チェック回数を少なくできる
  - x = 10 ～ 2000 ⇨ 10 ～ 21
  - y = 10 ～ 2000 ⇨ 10 ～ 27
  - z = 10 ～ 2000 ⇨ 10 ～ 18

7,892,485,271 回 ⇨ 1,836 回

99.9999767 % が無駄だった…

ポイント

- 組合せをチェックする場合
  - for 文などを使った多重（2重，3重，．．．）のループを作ることが多い
  - **チェック回数が爆発的に増えて**いくので注意

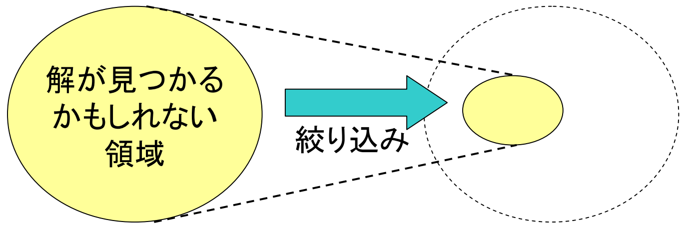
n 重ループだと **n 倍ではなく** **n 乗になる**点に注意

```
for ( i = 0; i < 100; i++ ){
  for ( j = 0; j < 100; j++ ){
    for ( k = 0; k < 100; k++ ){
      for ( l = 0; l < 100; l++ ){
        if ( … ) …
      }
    }
  }
}
```

例えば，100回繰り返しの 4 重ループだと 100^4 = 100,000,000 回

ポイント

- 問題の特性を見極め，**繰り返しの回数を減らしていく**必要がある
- 解の探索範囲を絞り込むことが重要

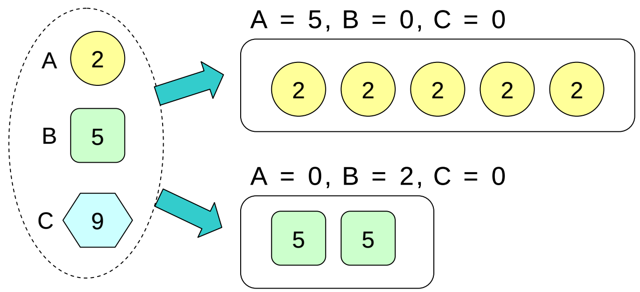


例題3

- 3種類の分銅 A(2g), B(5g), C(9g) がある. これらをそれぞれ 0 個以上使って x グラムを作りなさい. ただし, x は実行時に読み込むものとする.

例題3：解説

- 例えば, x = 10 の場合



例題3：解説

- A, B, C の個数を a, b, c とおく
- するとこの問題は

$$2a + 5b + 9c - x = 0$$

を満たす (a,b,c) を探す問題に帰着する

※ A = 2グラム
B = 5グラム
C = 9グラム

例題3：解説

- 後は例題2と同じ手順で範囲を絞る
- a の範囲（b = c = 0 として）

$$\boxed{2a + 5b + 9c - x = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2a - x = 0}$$

したがって,

$$\boxed{a \leqq x/2}$$

例題3:解説

- 同様にして

  $\boxed{b \leqq x/5}$

  $\boxed{c \leqq x/9}$

  が得られるので，後は a,b,c の3重ループで解ける

(参考)より効率的な方法

- 前述の方法で効率化は図れるが，
  - x が大きかったり
  - 分銅の種類が多かったり

  すると，どうしても時間がかかる

この種の問題は「ナップサック問題」という名で知られた有名な問題で，効率的に解くのが難しいとされている

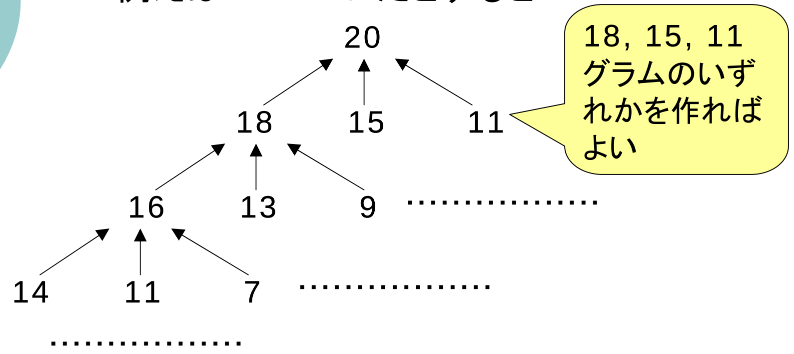
(参考)より効率的な方法

- x グラムの作り方に着目する
- 分銅は 2，5，9 グラムの3種類なので，x グラムぴったりを作るには
  - x－2 グラム
  - x－5 グラム
  - x－9 グラム

  のいずれかが作れればよい

(参考)より効率的な方法

- 例えば x ＝ 20 だとすると



（参考）より効率的な方法

- これを逆手にとって

y グラムを作れれば
→ y+2，y+5，y+9 グラムも作れる

順番にチェック

×	1
○	2 → 4，6，11
×	3
○	4 → 6，9，13
○	5 → 7，10，14
○	6 → 8，11，15
	…………

いきなり目的のグラム数を作ろうとはせず，小さいグラム数から順に積み上げていく

詳しくは後期の
「データ構造とアルゴリズム」で！